数理解析研究所講究録
第 756 巻 1991 年 117-136

Multplicity of Filtered Rings and Simple K3 Singularities

金沢大学 理　泊　昌孝　(Masataka TOMARI)

(0.1) 本稿は、[22][23] の続きであり、重複度の議論により、超曲面単純 K3 特異点の分類を行おうとするものである。すでに、この話題にかんしては、その提唱者による仕事 [8,9] をはじめ、K3 曲面という魅力的な対象にからめて、結果がえられている。擬斉次多項式で定義される場合や、Newton 境界に対して定義式が Kushinirenko の意味で non-degenerate となる超曲面単純 K3 特異点については、Reid , Fletcher 米村 らによって、独立に分類があたえられている [17,2,3,29]。それらは、９５の weighted homogeneous polynomial による代表系を持つ。本稿の問題がしめる位置を明らかにしておこう。

(0.2) simple K3 singularity は、いわゆる２次元 simple elliptic singularity [20] の高次元化なのであるが、定義は、言葉の上では "*Gorenstein purely elliptic singularity of type (0,2)*" と言うことになる。「 purely elliptic 」は特異点の多重種数によって「 type (0.2) 」は例外集合 の Mixed Hodge Structure による Hodge type である。[7,8,9 参]

このような特異点のうち最も典型的な例としては、擬斉次多項式で定義される weight の総和が 1 になる孤立特異点がある。このほか、擬斉次ではないが、

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + \lambda x^2y^2z^2w^2 = 0 \quad \lambda \neq 0$$
$$x^2 + y^3 + z^7 + w^{42} + \lambda yz^5w^{40} = 0 \quad \lambda \neq 0$$

なども simple K3 singularities である。逆に、我々はここで全ての hypersurface simple K3 singularity $\{f = 0\}$ が適当な座標の元で

$f = g + h$　gは　*weight* の総和が 1 になる擬斉次多項式 (孤立特異点とは限らぬ)

　　　h は上記の g の *weight* で見た高次の項

と表されるかということを問題にする。ある意味で、上に述べた９５の類に、すべての超曲面単純 K3 特異点は、分類されるであろうと考える。

新しい系列が現れないであろうという話であるから、つまらないと思われる読者もおありでしょう。しかし、これは別の非常にもっともな、M. Reid の予想とかかわっている。(cf. (0.5))

(0.3) ここで、もう一つ根底にある局所環を filtration で近似する問題に触れたい。状況は、特殊な特異点 を離れて一般の filtered ring のうちで次のようなものを考える。

(A, m) : d−dimensional Noether local ring over a field k,

$F = \{F^k\}_{k\geq 0}$: a filtration of ideals as follows ;

($F^0 = A \supset F^1 = m$, $F^k \supset F^{k+1}$, $F^k.F^j \subset F^{k+j}$,

$R = \oplus_{l\geq 0} F^l.T^l \subset A[T]$ is a finitely generated A−algebra, where T is an indeterminate.

There is an integer $N > 0$ with $(F^N)^m = F^{Nm}$ for $m \geq 0$.

F^N : m−primary)

仮定により $G_+ = \oplus_{l\geq 1} F^l/F^{l+1}$ は G の homogeneous maximal ideal となる。

問題： (A, m) の multiplicity $e(m, A)$ と $gr_F A = G = \oplus_{k\geq 0} F^k/F^{k+1}$ の multiplicity $e(G_+, G)$ の比較せよ。期待されることとして G が「良い」環ならば、両者は近いだろう。

Theorem A[22]. *Let the situation be as above. Further we assume that A is analytically unramified and that k is an infinite field. Let a system of elements $x_1, \dots, x_s \in G_+$ be a minimal homogeneous generator system of G_+ with $deg x_1 \leq deg x_2 \leq \dots \leq deg x_s$ with $s \geq d = \dim A = \dim G$. Then we have the following*

(1)

$$\left(\prod_{i=1}^{d} deg x_i\right) \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda)$$
$$\leq_{(i)} e(m, A)$$
$$\leq e(G_+, G) \leq_{(ii)} (deg x_s)^d \lim_{\lambda\to 1}(1-\lambda)^d P(G,\lambda).$$

where $P(G,\lambda) = \sum_{k\geq 0} l(G_k)\lambda^k \in \mathbb{Z}[[\lambda]]$.

(2) If the equality holds in (i), then $e(m, A) = e(G_+, G)$ and there is a parameter system $y_1, \dots, y_d$ of A whose initial form gives a homogeneous parameter system $in(y_1), \dots, in(y_d)$ of G such that $\deg in(y_i) = deg x_i$ for $i = 1, \dots, d$.

(3) If the equality holds in (ii) and G is normal with $(deg x_1, \dots, deg x_s) = 1$, then $e(m, A) = e(G_+, G)$ and G is a homogeneous ring. That is $deg x_i = 1$ holds for $i = 1, \dots, s$.

(0.4) われわれは、単純 K3 特異点の canonical filtration を考えることによって、(0.2) にたいして (0.3) の思想で立ち向かう。$(W = \mathrm{Spec}(A), w = V(m))$ を simple K3 singularity ,そして$\phi : \tilde{X} \longrightarrow W$ を resolution of singularity とする。Minimal model 理論により $\oplus_{k\geq 0}\phi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)$ は $O_W - algebra$ として有限生成である。

$$X = Proj(\oplus_{k\geq 0}\phi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)) \xrightarrow{\psi} W$$

は canonical singularity のみを有する partial resolution となるが、これは

$$F^k \cong \psi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right) \hookrightarrow \psi_*\left(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes k}\right)^{**} = \left(\omega_W^{[k]}\right) \cong A$$

となる ideal の filtration をひきおこす。これを canonical filtration ということにする。

そしてこの $F = \{F^k\}_{k\geq 0}$ に、我々の Theorem A を適用してみよう。 $\oplus_{k\geq 0}F^k/F^{k+1} = G$ は normal になり、Demazure の表示を用いると、$\psi^{-1}(w) = E$ なる rational double points のみを有する K3 surface 上 $O_E(D) \cong O_X(1)/O_X(2)$ によって定まる Weil divisor による

$$G = \oplus_{k\geq 0}F^k/F^{k+1} = R(E,D) = \oplus_{k\geq 0}H^0(E, O_E(kD))T^k$$

と表示されるものである ([7,8,9] [21])。$G_+ = (x_1, \ldots, x_s)$ with $deg x_1 \leq \ldots \leq deg x_s$ $(deg x_1, \ldots, deg x_s) = 1$ として、

Theorem B [23]. (W, w) を *simple K3 singularity of* $e(m, A) = 2$ であって $F = \{F^k\}_{k\geq 0}$ を *canonical filtration on* W とすると等号 $e(G_+, G) = e(m, A) = 2$ が成立する。

(0.5) G は Gorenstein normal domain であることにより $e(G_+, G) \leq 3$ ならば、G は hypersurface である。 G を $G = \mathbb{C}[x, y, z, w]/g$ と言う具合いに weighted homogeneous polynomial で表してやると、$Spec(G) - V(G_+)$ は 3 次元 rational singularity を持つのみであることがわかっている。

g の Newton 境界 $\Gamma(g) \subset \mathbb{C}^4$について $dim\Gamma(g) = 3$ かつ点 $(1,1,1,1)$ が$\Gamma(g)$ の相対内部に含まれることがわかる (§5 of [22]) 。$x, y, z, w \in G$ を initial form として実現する $m \subset A = O_{W,w}$ の元をそれぞれ $X, Y, Z, W \in m$ とすると $(X, Y, Z, W) = m$ である。

$A^\wedge = \mathbb{C}\{X, Y, Z, W\}/f$ という表示を用いると、X, Y, Z, W の weight による monomial の weight filtration (これを、 monomial filtration と呼ぶ。) が実は $F = \{F^k\}_{k\geq 0}$ (の $A^\wedge$ への induce するもの) そのものである。 $in_F f = g$ であることになる。$\{f = 0\} = W$ は not rational singularity であるが、このような analytic な座標系 (X, Y, Z, W) の存在性を M. Reid 先生は [17] のなかで次の様な形で予想されている。

Conjecture (M. Reid [17]). *Let $\{f = 0\} \subset (\mathbb{C}^{d+1}, o)$ be an isolated d-dimensional hypersurface singularity. If the condition $a(gr_F(A)) \leq -1$ is satisfied for any monomial filtration F of $A = \mathbb{C}\{x\}/(f)$ for any coordinate system $x_1, \dots, x_{d+1}$, then $\{ f = 0 \}$ is a rational singularity.*

それを、非常に特殊な場合であるが、この 定理は証明した事になる。逆に、Reid の予想が正しければ、hypersurface simple K3 singularity の canonical filtration は monomial filtration になることが知られている (Corollary (4.15)[21]) 。

(0.6) Theorem A を用いて Theorem B を証明するには次の事を示せばよいのであった。

Theorem C [23]. *E を K3 surface with rational double points とし D を ample $\mathbb{Q}$−Cartier integral Weil divisor 、$G = R(E, D)$, $G_+ = (x_1, \dots, x_s)$ $degx_1 \leq \dots \leq degx_s$* とする。その時

$$degx_1.degx_2.degx_3.D^2 \geq 2.$$

となる。

超曲面単純 K3 の重複度は、2 、3 、4 、の 3 通りである。4 重点については、Reid の予想が正しいので (0.2) は肯定的に解けている。残るのは 3 重点のみである。本稿の §2 では、$3 \geq degx_1.degx_2.degx_3.D^2 \geq 2$ となる normal polarized K3 surface の Riemann-Roch formula の誤差項の data の list をあたえる。

重複度 2 の単純 K3 特異点の canonical model に現れる polarized K3 surface (E, D) を (0,4) の要領で $G = R(E, D)$ として求めると、Theorem A (2) の y_1, y_2, y_3 を用いると、$in(y_i)/T^{q_i} \in H^0(E, O_E(q_i D)) \subset k(E)$ について、

$$\left(div_E(\frac{in(y_1)}{T^{q_1}}) + q_1 D\right) \cap \left(div_E(\frac{in(y_2)}{T^{q_2}}) + q_2 D\right) \cap \left(div_E(\frac{in(y_3)}{T^{q_3}}) + q_3 D\right) = \emptyset$$

がわかる。重複度が 3 の場合もはやこの様なことは期待できない。§1 では、

$$\left(div_E(\frac{in(y_1)}{T^{q_1}}) + q_1 D\right) \cap \left(div_E(\frac{in(y_2)}{T^{q_2}}) + q_2 D\right) \cap \left(div_E(\frac{in(y_3)}{T^{q_3}}) + q_3 D\right)$$

が discrete に成るような場合の parameter system y_1, y_2, y_3 についての重複度の計算公式を述べる。

本来、§2 の各類について、§1 を用いた議論が続くべきであろうが、残念ながら、私はこれ以上の結果を重複度 3 の場合にはもっていない。

§1. Higher dimensional analogy of Laufer's theorem.

(1.1) 本節は、§1 [22] の記号等を用いる。環論、特に重複度の一般論として、[15, 17, 5] などを参照。結果を述べるために、divisor についての intersection 数を一つ導入する。

(1.2) d 次元 local ring (A, m) 上の effective $\mathbb{Q}$-Cartier divisor $W_1 \ \dots W_d$ の集合が $A(-r_i W_i) = t_i A$, $r_i \in \mathbb{Z}$, with $r_i > 0$, $t_i \in m \subset A$ として与えられて居るものとする。 ここで $W_1 \cap \ \dots \ \cap W_d = \{V(m)\}$ であると仮定する。すなわち、$(t_1, \dots t_d)$ は a parameter system of A である。このとき、有理数 $\dfrac{e((t_1, \dots, t_d), A)}{r_1 \dots r_d}$ は、Lech's Lemma (Theorem 14.12 [13]) により、$(t_i, r_i)'s$ のとりかたによらずに決まることがわかる。そこで、次の様に $I(W_1 \dots W_d, A)$ を定める。

Definition (1.2.1).

$$I(W_1 \dots W_d, A) = \frac{e((t_1, \dots, t_d), A)}{r_1 \dots r_d}$$

以下の定理は、H.Laufer の 2 次元についての結果 [12] に触発されたものである。

Theorem (1.3). *Let (W, w) be a normal d-dimensional singularity and $(x_1, \dots, x_d)$ a parameter system of $O_{W,w}$. Let $\psi : X \to W$ be a projective modification with normal X and $E = \psi^{-1}(w)$. We write $div_X(x_i O_X)$ by*

$$div_X(x_i O_X) = D(x_i O_W, \psi) + W_{x_i,\psi} \quad i = 1, \dots, d,$$

where $W_{x_i,\psi}$ is the strict transform of $\{x_i = 0\}$ and $D(x_i O_W, \psi)$ is the part of E. We assume that the divisor $W_{x_i,\psi}$ is $\mathbb{Q}-$Cartier for i = 1, ... ,d.

If $W_{x_1,\psi} \cap \ldots \cap W_{x_d,\psi}$ is a discrete set on E, we have the relation

$$e((x_1, \ldots, x_d), O_{W,w}) = (-1)^{d+1} D(x_1 O_W, \psi) \ldots D(x_d O_W, \psi) + \sum_{p \in W_{x_1,\psi} \cap \ldots \cap W_{x_d,\psi}} I(W_{x_1,\psi} \ldots W_{x_d,\psi}, O_{X,p}).$$

(1.4) *Proof.* 主張に現れている、項はすべて x_i のべき、および divisor の整数倍に関して多重線形である。ゆえに、x_i の充分大きなべきをとって、あらかじめ現れる divisor が全て locally principal であると仮定しても一般性を失わない。

(1.4.1)*Step 1.* $W_{x_1,\psi} \cap \ldots \cap W_{x_d,\psi}$ が空集合の場合に、定理の主張を示す。まず、$(x_1, \ldots, x_d).O_X$ が locally principal であると仮定しよう。X の effective divisor D によって $(x_1, \ldots, x_d).O_X = O_X(-D)$ とかかれる。C.P. Ramanujan [15] (Theorem 1[22]) により、$e((x_1, \ldots, x_d), O_W) = (-1)^{d+1}.D^d$ である。$D((x_i), \psi) = D + E_i$ ($i = 1, \ldots, d$), とあらわすと $E_1 \cap \ldots \cap E_d$ は空集合である。$D((x_i), \psi) + W_{x_i,\psi} = div(x_i O_X)$ が $E = \psi^{-1}(w)$ の近傍で principal divisor ($i = 1, \ldots, d$) なので、次が成立する

$$E_1.D((x_2), \psi). \ldots .D((x_d), \psi) = (-1)^{d-1} E_1.W_{x_2,\psi}. \ldots .W_{x_d,\psi}.$$

ここで $E_1 \cap W_{x_2,\psi} \cap \ldots \cap W_{x_d,\psi}$ が空集合であることが次のようにしてわかる。もしも $Q \in E_1 \cap W_{x_2,\psi} \cap \ldots \cap W_{x_d,\psi}$ ならば、$x_1 \in m_Q.O_X(-D)$ かつ $x_i \in m_Q.O_X(-D((x_i), \psi)) \subset m_Q.O_X(-D)$ ($i = 2, \ldots, d$) なのだが、われわれは $(x_1, \ldots, x_d).O_X = O_X(-D)$ だと仮定していることに反してしまう。よって、

$$E_1.D((x_2), \psi). \ldots .D((x_d), \psi) = 0.$$

同様にして

$$E_1. \ldots .E_i.D((x_{i+1}), \psi). \ldots .D((x_d), \psi) = 0$$

(i = 1, ..., d-1) などが従うので、求める次の等式をえる。

$$\begin{aligned} D^d &= (D((x_1), \psi) - E_1). \ldots .(D((x_d), \psi) - E_d) \\ &= D((x_1), \psi). \ldots .D((x_d), \psi). \end{aligned}$$

$(x_1, \ldots, x_d).O_X$ が locally principal でない場合について。適当な birational morphism $\sigma : M \to X$ によって $(x_1, \ldots, x_d).O_M$ が local principal になる。$\varphi = \sigma \cdot \psi$ と置

く。M 上の divisor F_i を $D((x_i),\varphi) = \sigma^{-1}(D((x_i),\psi)) + F_i$ とすると、容易に $\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi}) = F_i + W_{x_i,\varphi}$ for $(i = 1, \dots d)$ がわかる。$W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi}$ が空集合だから、$F_1 \cap \dots \cap F_d$もそうである。ゆえに

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(D(x_1),\psi)).F_2. \dots F_d &= \sigma^{-1}(div(x_1.O_X) - W_{x_1,\psi}).F_2. \dots F_d\\ &= div(x_1.O_M).F_2. \dots F_d - \sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}).F_2. \dots F_d.\end{aligned}$$

$x_i.O_M$ が $\varphi^{-1}(w)$ の近傍で principal であるから、$div(x_1.O_M).F_2. \dots F_d = 0$ である。また、$W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi}$ が空集合だから、$\sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}) \cap F_2 \cap \dots \cap F_d$もそうである。ゆえに$\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)).F_2. \dots .F_d = 0.$

$$\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)). \dots .\sigma^{-1}(D((x_i),\psi)).F_{i+1}. \dots .F_d = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots d-1.$$

なども同様に従うので、求める次式が得られる。

$$\begin{aligned}D((x_1),\varphi). \dots .D((x_d),\varphi) &= (\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)) + F_1) \dots (\sigma^{-1}(D((x_d),\psi)) + F_d)\\ &= \sigma^{-1}(D((x_1),\psi)). \dots .\sigma^{-1}(D((x_d),\psi))\\ &= D((x_1),\psi). \dots .D((x_d),\psi).\end{aligned}$$

(1.4.2) *in the general case.* 上と同様に適当な birational morphism $\sigma : M \to X$ によって $(x_1, \dots, x_d).O_M$ が local principal にし、$\varphi = \sigma \cdot \psi$ や M 上の divisor F_i を $D((x_i),\varphi) = \sigma^{-1}(D((x_i),\psi)) + F_i$ とする。まず、

$$e((x_1, \dots, x_d), O_{W,w}) = (-1)^{d+1} D(x_1 O_W, \varphi) \dots D(x_d O_W, \varphi).$$

容易に,

$$\begin{aligned}&D((x_1),\varphi). \dots .D((x_d),\varphi)\\ =&(\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)) + F_1) \dots (\sigma^{-1}(D((x_d),\psi)) + F_d)\\ =&(\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)) + \sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}) - W_{x_1,\varphi})\\ &. \dots .(\sigma^{-1}(D((x_d),\psi)) + \sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}) - W_{x_1,\varphi})\\ =&D((x_1),\psi). \dots .D((x_d),\psi)\\ &+ \sum_{i=1}^{d} \sigma^{-1}(D((x_1),\psi)). \dots .\sigma^{-1}(D((x_{i-1}),\psi))(\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi}) - W_{x_i,\varphi})\\ &\sigma^{-1}(D((x_{i+1}),\psi)). \dots .\sigma^{-1}(D((x_d),\psi))\\ &+ \dots\dots\end{aligned}$$

始めに述べたように、全ての divisor は locally principal であって、$x_i.O_M = \sigma^{-1}(D(x_i,\psi)) + \sigma^{-1}(W_{x_i,\psi})$ は $\varphi^{-1}(w)$ の近傍で principal である。よって、

$$\begin{aligned}&\sigma^{-1}(D((x_1),\psi)).\ \dots\ .\sigma^{-1}(D((x_{i-1}),\psi))(\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi}) - W_{x_i,\varphi})\\ &\sigma^{-1}(D((x_{i+1}),\psi)).\ \dots\ .\sigma^{-1}(D((x_d),\psi))\\ =&(-1)^{d-1}\sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}).\ \dots\ .\sigma^{-1}(W_{x_{i-1},\psi})(\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi}) - W_{x_i,\varphi})\\ &\sigma^{-1}(W_{x_{i+1},\psi}).\ \dots\ .\sigma^{-1}(W_{x_d,\psi}).\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}&Supp\sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}) \cap \dots \cap Supp\sigma^{-1}(W_{x_{i-1},\psi}) \cap Supp(\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi}) - W_{x_i,\varphi})\\ &\cap Supp\sigma^{-1}(W_{x_{i+1},\psi}) \cap \dots \cap Supp\sigma^{-1}(W_{x_d,\psi})\\ \subset&\sigma^{-1}(SuppW_{x_1,\psi} \cap \dots \cap SuppW_{x_d,\psi}).\end{aligned}$$

ここで $SuppW_{x_1,\psi} \cap \dots \cap SuppW_{x_d,\psi}$ は discrete であり $\sigma^{-1}(W_{x_i,\psi})$ はこの各点上で trivial in M. だから、上記の展開項の中で zero でない可能性のあるのはつぎの二つだけである。

$$\begin{gathered}D((x_1),\psi).\ \dots\ .D((x_d),\psi) \quad \text{and}\\ (\sigma^{-1}(W_{x_1,\psi}) - W_{x_1,\varphi}).\ \dots\ (\sigma^{-1}(W_{x_d,\psi}) - W_{x_d,\varphi}).\end{gathered}$$

今 $W_{x_1,\varphi} \cap \dots \cap W_{x_d,\varphi}$ は空集合なので、後の項は (1.4.1) により

$$\sum_{p \in W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi}} (-1)^{d+1} I(W_{x_1,\psi} \dots W_{x_d,\psi}, O_{X,p})$$

に一致することがわかる。

Q.E.D.

(1.5) さて $R = R(E,D)$ を normal d-dimensional graded ring with Demazure's description とし、特異点 $Spec(R)$ の $V(R_+)$ における 次数に関する filtered blowing up を考える。

$$\psi : C = C(E,D) = Spec_E(\oplus_{k\geq 0} O_E(kD)) \to Spec(R)$$

Theorem (1.3) の条件について調べてみよう。

Lemma (1.6). *(1) Let $x_1, \dots, x_d \in R$ be a parameter system at R_{R_+}. Suppose $x_1, \dots, x_r$ with $r \le d$ be homogeneous elements. Then we have $\dim W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi} \le d-r-1$ in $C(E,D)$. Hence in the case $r \ge d-1$, $W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi}$ is discrete.*
(2) If R is a hypersurface and R_0 is an infinite field, we can choose a reduction $x_1, \dots, x_d \in R_+$ of the maximal ideal such that $W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi}$ is at most one point.

Proof. (1) $x_1, \dots, x_r$ が R の homogeneous elements だとし、次の図式を考えよう。

$$\begin{array}{cccc} E \longrightarrow & C(X,D) & \xrightarrow{\Psi} & W = \mathrm{Spec}(R) \\ \searrow & \downarrow \pi & & \\ & E = Proj(R) & & \end{array} \tag{1.6.1}$$

B を $W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_d,\psi} \cap E$ の既約成分とする。$W_{x_i,\psi}$, $1 \le i \le r$ は k^*−stable だから、$\pi^{-1}(B) \subset W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_r,\psi}$ である。そして $\dim \pi^{-1}(B) = \dim B + 1$. $x_1, \dots, x_d$ は R_{R_+} における parameter system だから, $\dim W_{x_1,\psi} \cap \dots \cap W_{x_r,\psi} = d - r$ in $C(E,D)$.

(2) $R = k[x_1, \dots, x_{d+1}]/f$ with a minimal homogeneous generator system $x_1, \dots, x_s \in R_+$ such that $deg x_1 \le deg x_2 \le \dots \le deg x_{d+1}$ という具合いにあらわしたとする。$\mathrm{Proj}(R/(x_1, \dots, x_d)) \subset E \cap \mathrm{Proj}(k[x_1, \dots, x_{d+1}]/(x_1, \dots, x_d))$ であるが、右辺は一点から成る集合である。あとは、[22](4.1) の要領で parameter を作ればよい。

Remark (1.7). *Let the situation be as in (1.5). Then the following relations hold.*

$$D^{d-1} = (-1)^{d+1} E^d = \lim_{\lambda \to 1} (1-\lambda)^d P(R,\lambda) \tag{1}$$

where $P(R,\lambda) = \sum_{k \ge 0} l(R_k)\lambda^k \in \mathbb{Z}[[\lambda]]$, with $d = \dim R$.
(2) If $x_1, \dots, x_d \in R$ is a homogeneous parameter system, then

$$e((x_1, \dots, x_d), R) = (-1)^{d+1} \left(\prod_{i=1}^{d} deg x_i \right) . E^d.$$

Here E^d is the intersection multiplicity in $C = C(E,D)$.

§2. The baskets of singularities for (E,D) with $q_1 q_2 q_3 D^2 \le 3$.

(2.1) [23] における Theorem C の証明の骨子は、特異点を有する代数曲面についての Riemann-Roch formula の使用であった。以下、我々の分類の用語を説明する意味で、もう一度復習する。singularity を持つ曲面上の Riemann-Roch formula 特にその特異点からの具体的な効果については、J. Giraud[4], 及び M. Reid [19] の仕事があり、特に Reid 氏の記述は示唆に富んでいる。E を projective surface with at worst rational double points としそして D を Weil divisor on Eとする。D は $\mathbb{Q}$−Cartier だから、the intersection numbers $D^2, K_E D \in \mathbb{Q}$ が定義される。

Theorem (see Theorem (9.1)[19]). *There is a formula*

$$\chi(E, O_E(D)) = \chi(O_E) + \frac{1}{2}(D^2 - DK_E) + \sum_Q c_Q(D)$$

where $c_Q(D) = c_Q(O_E(D)) \in \mathbb{Q}$ is a contribution due to the singularity of $O_E(D)$ at Q , depending only on the local analytic type of $Q \in E$ and D ; the sum takes place over the singularities of D (the points $Q \in E$ at which D is not Cartier).
(II) If $P \in E$ and D is a cyclic quotient singularity of type $_i\left(\frac{1}{r}(1,-1)\right)$ then

$$c_P(D) = -\frac{i(r-i)}{2r}.$$

(III) For every rational double singularity $Q \in E$ and Weil divisor D on E, there exists a basket of points of $\{P_\alpha \in E_\alpha$ and $D_\alpha\}$ of type $_{i_\alpha}\left(\frac{1}{r_\alpha}(1,-1)\right)$ and with i_α coprime to r_α, such that

$$c_Q(D) = \sum_\alpha c_{P_\alpha}(D_\alpha) = -\sum_\alpha \frac{i_\alpha(r_\alpha - i_\alpha)}{2r_\alpha}.$$

このように rational double points のみを特異点にもつ場合、the Riemann-Roch formula の立場では、singularities は rational singularity of type $A_{r_\alpha - 1}$ であるとしてよい。また、D の定める $Cl(A_{r_\alpha-1}) \cong \mathbb{Z}/r_\alpha.\mathbb{Z}$ に於ける polarization $i_\alpha \in \{1, \ldots, r_\alpha - 1\}$ は, その対称性により、$2i_\alpha \leq r_\alpha$ であると仮定して良い。

(2.2) (E, D) を (0.4) のようにして現れる rational double points を有する K3 曲面 E とその上の Weil divisor D であるとする。(2.1) のように、Riemann-Roch の公式の誤差項の意味で、特異点の局所 polarization の data が

$$\{A_{r_\alpha-1}, cl(D_\alpha) = i_\alpha, \ (2i_\alpha \leq r_\alpha) \ ; \alpha = 1, \ldots, N\}.$$

として与えられるものとする。これを、the basket of singularities of (E, D) と呼ぶことにする。また

$$b_m = dim H^0(E, O_E(mD)) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

と定めると、 Kawamata's vanishing theorem より、

$$b_m = \frac{m^2 D^2}{2} + 2 + c_Q(mD) \quad \text{for} \quad m \geq 1.$$

である。 $m = 1, 2$ の式より

$$D^2 = 2(b_1 - 2) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{i_\alpha(r_\alpha - i_\alpha)}{r_\alpha} \tag{2.2.1}$$

$$b_2 = 4b_1 - 6 + \sum_{\alpha=1}^{N} i_\alpha. \tag{2.2.2}$$

である。[23] で述べた $q_1q_2q_3D^2 \leq 2$ なる $\{ D^2$, the basket $\}$ の有限性と同様の議論を経た後に $q_1q_2q_3D^2 \leq 3$ なる data を計算した。以下の list の Example は、すべて Fletcher と米村の list[2,3,29] より拾ったものである。

The case of $b_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^0(E, O_E(D)) = 0$.

The case of $b_1 = b_2 = 0$.

i_α	1	1	1	1	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_4	$\frac{1}{60}$	4, 5, 6	2	$X_{30} \subset P(4.5.6.15)$
	A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	A_6	$\frac{1}{42}$	3, 6, 7	3	$X_{24} \subset P(3.6.7.8)$
	A_1	A_2	A_2	A_2	A_3	A_4	$\frac{1}{20}$	3, 4, 5	3	$X_{18} \subset P(3.4.5.6)$
	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_3	$\frac{1}{12}$	3, 3, 4	3	$X_{15} \subset P(3.3.4.5)$

i_α	2	1	1	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_4	A_2	A_2	A_3	A_3	$\frac{1}{30}$	3, 4, 5	2	$X_{24} \subset P(3.4.5.12)$
	A_6	A_1	A_1	A_3	A_5	$\frac{1}{84}$	4, 6, 7	2	$X_{34} \subset P(4.6.7.17)$
	A_6	A_1	A_2	A_2	A_3	$\frac{1}{84}$	3, 4, 14	2	$X_{42} \subset P(3.4.14.21)$
	A_4	A_2	A_2	A_2	A_5	$\frac{1}{30}$	3, 5, 6	3	$X_{21} \subset P(3.5.6.7)$
	A_8	A_1	A_1	A_2	A_4	$\frac{1}{45}$	4, 5, 6	$2 + \frac{2}{3}$	$X_{24} \subset P(4.5.6.9)$

i_α	3	1	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_6	A_3	A_3	A_4	$\frac{1}{70}$	$4,5,7$	2	$X_{32} \subset P(4.5.7.16)$
	A_7	A_1	A_4	A_5	$\frac{1}{120}$	$5,6,8$	2	$X_{38} \subset P(5.6.8.29)$
	A_7	A_2	A_2	A_4	$\frac{1}{120}$	$5,6,8$	2	$X_{48} \subset P(3.5.16.24)$
	A_9	A_1	A_2	A_3	$\frac{1}{60}$	$3,4,10$	2	$X_{34} \subset P(3.4.10.17)$
	A_{10}	A_1	A_2	A_2	$\frac{1}{66}$	$3,4,11$	2	$X_{36} \subset P(3.4.11.18)$
	A_6	A_2	A_3	A_7	$\frac{1}{168}$	$7,8,9$	3	$X_{36} \subset P(7.8.9.12)$
	A_6	A_2	A_4	A_5	$\frac{1}{70}$	$5,6,7$	3	$X_{27} \subset P(5.6.7.9)$
	A_7	A_2	A_3	A_3	$\frac{1}{24}$	$3,4,5$	$2+\frac{1}{2}$	$X_{20} \subset P(3.4.5.8)$
	A_{10}	A_1	A_1	A_5	$\frac{1}{66}$	$4,6,7$	$2+\frac{6}{11}$	$X_{28} \subset P(4.6.7.11)$
	A_{13}	A_1	A_1	A_2	$\frac{1}{42}$	$4,5,6$	$2+\frac{6}{7}$	

i_α	2	2	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{10}	A_4	A_2	A_1	$\frac{1}{330}$	$5,6,22$	2	$X_{66} \subset P(5.6.22.23)$
	A_6	A_6	A_2	A_1	$\frac{1}{42}$	$3,4,7$	2	$X_{28} \subset P(3.4.7.14)$
	A_8	A_4	A_3	A_1	$\frac{1}{180}$	$4,5,18$	2	$X_{58} \subset P(4.5.18.27)$
	A_6	A_4	A_7	A_1	$\frac{1}{280}$	$7,8,10$	2	$X_{50} \subset P(7.8.10.25)$
	A_4	A_4	A_6	A_3	$\frac{1}{140}$	$5,7,8$	2	$X_{40} \subset P(5.7.8.20)$
	A_6	A_4	A_3	A_2	$\frac{19}{420}$	$3,4,5,7$	$2+\frac{5}{7}$	$X_{19} \subset P(3.4.5.7)$

i_α	3	2	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{12}	A_4	A_1	$\frac{1}{130}$	$4,5,13$	2	$X_{44} \subset P(4.5.13.22)$
	A_9	A_6	A_1	$\frac{1}{35}$	$3,4,7$	$2+\frac{2}{5}$	$X_{24} \subset P(3.4.7.10)$
	A_7	A_{10}	A_1	$\frac{1}{88}$	$5,6,8$	$2+\frac{8}{11}$	$X_{30} \subset P(5.6.8.11)$
	A_{10}	A_4	A_2	$\frac{8}{165}$	$3,4,5$	$2+\frac{10}{11}$	
	A_9	A_4	A_3	$\frac{1}{20}$	$3,4,5$	3	
	A_6	A_8	A_3	$\frac{2}{252}$	$4,5,7$	$2+\frac{7}{9}$	$X_{25} \subset P(4.5.7.9)$

i_α	4	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{10}	A_4	A_2	$\frac{2}{165}$	$3,5,11$	2	$X_{38} \subset P(3.5.11.19)$
	A_{12}	A_3	A_1	$\frac{1}{52}$	$3,4,10$	$2+\frac{4}{13}$	$X_{30} \subset P(3.4.10.13)$
	A_{10}	A_3	A_1	$\frac{1}{22}$	$3,4,5$	$2+\frac{8}{11}$	

i_α	5	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{16}	A_1	$\frac{1}{34}$	$3,4,7$	$2+\frac{8}{17}$	
	A_{13}	A_4	$\frac{1}{70}$	$3,5,11$	$2+\frac{5}{14}$	$X_{33} \subset P(3.5.11.14)$

The case of $b_1 = 0, b_2 = 1$.

i_α	1	1	1	1	1	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	A_6	$\frac{1}{42}$	$2,6,7$	2	$X_{30} \subset P(2.6.7.15)$
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_3	A_4	$\frac{1}{20}$	$2,4,5$	2	$X_{22} \subset P(2.4.5.11)$
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	A_2	A_3	$\frac{1}{12}$	$2,3,4$	2	$X_{18} \subset P(2.3.4.9)$
	A_1	A_1	A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	$\frac{1}{6}$	$2,3,3$	3	$X_{12} \subset P(2.3.3.4)$

i_α	2	1	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_1	A_1	A_1	A_1	A_5	$\frac{1}{30}$	$2,5,6$	2	$X_{26}\subset P(2.5.6.13)$
	A_4	A_1	A_1	A_1	A_2	A_2	$\frac{1}{30}$	$2,3,10$	2	$X_{30}\subset P(2.3.10.15)$
	A_4	A_1	A_1	A_1	A_2	A_3	$\frac{7}{60}$	$2,3,4$	$2+\frac{4}{5}$	$X_{14}\subset P(2.3.4.5)$
	A_6	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	$\frac{2}{21}$	$2,3,4$	$2+\frac{2}{7}$	$X_{16}\subset P(2.3.4.7)$
	A_8	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{1}{18}$	$2,4,5$	$2+\frac{2}{9}$	$X_{20}\subset P(2.4.5.9)$

i_α	3	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_1	A_1	A_1	A_4	$\frac{1}{42}$	$2,5,14$	2	$X_{42}\subset P(2.5.14.21)$
	A_6	A_1	A_1	A_2	A_2	$\frac{1}{21}$	$2,3,7$	2	$X_{24}\subset P(2.3.7.12)$
	A_7	A_1	A_1	A_1	A_2	$\frac{1}{24}$	$2,3,8$	2	$X_{26}\subset P(2.3.8.13)$
	A_6	A_1	A_1	A_1	A_5	$\frac{1}{21}$	$2,5,6$	$2+\frac{6}{7}$	$X_{20}\subset P(2.5.6.7)$
	A_7	A_1	A_1	A_1	A_3	$\frac{1}{8}$	$2,3,4$	3	
	A_9	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{1}{10}$	$2,3,4$	$2+\frac{2}{5}$	

i_α	2	2	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_4	A_1	A_1	A_2	$\frac{1}{15}$	$2,3,5$	2	$X_{20}\subset P(2.3.5.10)$

i_α	4	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_8	A_1	A_1	A_4	$\frac{1}{45}$	$2,5,9$	2	$X_{32}\subset P(2.5.9.16)$
	A_8	A_1	A_2	A_2	$\frac{1}{18}$	$2,3,7$	$2+\frac{1}{3}$	$X_{21}\subset P(2.3.7.9)$
	A_{10}	A_1	A_1	A_1	$\frac{1}{22}$	$2,3,8$	$2+\frac{2}{11}$	$X_{24}\subset P(2.3.8.11)$

i_α	4	2	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_8	A_4	A_2	$\frac{4}{45}$	$2,3,5$	$2+\frac{2}{3}$	

i_α	3	2	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_4	A_1	A_2	$\frac{17}{210}$	$2,3,5$	$2+\frac{3}{7}$	$X_{17}\subset P(2.3.5.7)$
	A_7	A_4	A_1	A_1	$\frac{3}{40}$	$2,3,5$	$2+\frac{1}{4}$	$X_{18}\subset P(2.3.5.8)$

i_α	3	3	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_6	A_2	$\frac{2}{21}$	$2,3,5$	$2+\frac{6}{7}$	
	A_6	A_7	A_1	$\frac{5}{56}$	$2,3,5$	$2+\frac{19}{28}$	

i_α	2	2	2	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_4	A_4	A_1	$\frac{1}{10}$	$2,3,5$	3	$X_{15}\subset P(2.3.5.5)$

i_α	6	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_{12}	A_4	$\frac{2}{65}$	$2,5,9$	$2+\frac{10}{13}$	

i_α	5	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_{10}	A_1	A_4	$\frac{3}{110}$	$2,5,9$	$2+\frac{5}{11}$	$X_{27}\subset P(2.5.9.11)$
	A_{10}	A_2	A_2	$\frac{2}{33}$	$2,3,7$	$2+\frac{6}{11}$	
	A_{11}	A_1	A_2	$\frac{1}{12}$	$2,3,5$	$2+\frac{1}{2}$	
	A_{12}	A_1	A_1	$\frac{1}{13}$	$2,3,5$	$2+\frac{4}{13}$	

i_α	4	3	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_8	A_7	$\frac{7}{72}$	$2,3,5$	$2+\frac{11}{12}$	

The case of $b_1=0, b_2=2$.

i_α	1	1	1	1	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	$\frac{1}{6}$	$2,2,3$	2	$X_{14}\subset P(2.2.3.7)$
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_3	$\frac{1}{4}$	$2,2,3$	3	

i_α	2	1	1	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{1}{5}$	$2,2,3$	$2+\frac{2}{5}$	$X_{12}\subset P(2.2.3.5)$

i_α	3	1	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{3}{14}$	$2,2,3$	$2+\frac{4}{7}$	

i_α	4	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_8	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{2}{9}$	2, 2, 3	$2+\frac{2}{3}$	

i_α	5	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{10}	A_1	A_1	A_1	$\frac{5}{22}$	2, 2, 3	$2+\frac{8}{11}$	

i_α	6	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{12}	A_1	A_1	$\frac{3}{13}$	2, 2, 3	$2+\frac{10}{13}$	

i_α	7	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{14}	A_1	$\frac{7}{30}$	2, 2, 3	$2+\frac{4}{5}$	

i_α	8	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_{16}	$\frac{4}{17}$	2, 2, 3	$2+\frac{14}{17}$	

The case of $b_1 = \dim_{\mathbf{C}} H^0(E, O_E(D)) = 1$.

The case of $b_1 = b_2 = 1$.

i_α	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	A_2	A_6	$\frac{1}{42}$	1, 6, 14	2	$X_{42} \subset P(1.6.14.21)$
	A_1	A_2	A_7	$\frac{1}{24}$	1, 6, 8	2	$X_{30} \subset P(1.6.8.15)$
	A_1	A_3	A_4	$\frac{1}{20}$	1, 4, 10	2	$X_{30} \subset P(1.4.10.15)$
	A_1	A_3	A_5	$\frac{1}{12}$	1, 4, 6	2	$X_{22} \subset P(1.4.6.11)$
	A_1	A_4	A_4	$\frac{1}{10}$	1, 4, 5	2	$X_{20} \subset P(1.4.5.10)$
	A_2	A_2	A_3	$\frac{1}{12}$	1, 3, 8	2	$X_{24} \subset P(1.3.8.12)$
	A_2	A_2	A_4	$\frac{2}{15}$	1, 3, 5	2	$X_{18} \subset P(1.3.5.9)$
	A_2	A_3	A_3	$\frac{1}{6}$	1, 3, 4	2	$X_{16} \subset P(1.3.4.8)$
	A_1	A_2	A_8	$\frac{1}{18}$	1, 6, 8	$2+\frac{2}{3}$	$X_{24} \subset P(1.6.8.9)$
	A_1	A_3	A_6	$\frac{3}{28}$	1, 4, 6	$2+\frac{4}{7}$	$X_{18} \subset P(1.4.6.7)$
	A_1	A_3	A_7	$\frac{1}{8}$	1, 4, 6	3	
	A_1	A_4	A_5	$\frac{2}{15}$	1, 4, 5	$2+\frac{2}{3}$	$X_{16} \subset P(1.4.5.6)$
	A_2	A_2	A_5	$\frac{1}{6}$	1, 3, 5	$2+\frac{1}{2}$	$X_{15} \subset P(1.3.5.6)$
	A_2	A_2	A_6	$\frac{4}{21}$	1, 3, 5	$2+\frac{6}{7}$	
	A_2	A_3	A_4	$\frac{13}{60}$	1, 3, 4	$2+\frac{3}{5}$	$X_{13} \subset P(1.3.4.5)$
	A_2	A_3	A_5	$\frac{1}{4}$	1, 3, 4	3	
	A_3	A_3	A_3	$\frac{1}{4}$	1, 3, 4	3	$X_{12} \subset P(1.3.4.4)$

i_α	2	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_4	A_5	$\frac{1}{30}$	1, 5, 12	2	$X_{36} \subset P(1.5.12.18)$
	A_4	A_6	$\frac{2}{35}$	1, 5, 7	2	$X_{26} \subset P(1.5.7.13)$
	A_6	A_2	$\frac{2}{21}$	1, 3, 7	2	$X_{22} \subset P(1.3.7.11)$
	A_8	A_1	$\frac{1}{18}$	1, 4, 9	2	$X_{28} \subset P(1.4.9.14)$
	A_4	A_7	$\frac{3}{40}$	1, 5, 7	$2+\frac{5}{8}$	$X_{21} \subset P(1.5.7.8)$
	A_6	A_3	$\frac{5}{28}$	1, 3, 4	$2+\frac{1}{7}$	$X_{15} \subset P(1.3.4.7)$
	A_6	A_4	$\frac{8}{35}$	1, 3, 4	$2+\frac{26}{35}$	
	A_8	A_2	$\frac{2}{9}$	1, 3, 4	$2+\frac{2}{3}$	
	A_{10}	A_1	$\frac{3}{22}$	1, 4, 5	$2+\frac{8}{11}$	

i_α	3	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_9	$\frac{1}{10}$	1, 3, 7	$2+\frac{1}{10}$	$X_{21} \subset P(1.3.7.10)$
	A_{10}	$\frac{2}{11}$	1, 3, 4	$2+\frac{2}{11}$	

$b_1 = 1, b_2 = 2$.

i_α	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	A_1	A_1	A_2	$\frac{1}{6}$	1, 2, 6	2	$X_{18} \subset P(1.2.6.9)$
	A_1	A_1	A_1	A_3	$\frac{1}{4}$	1, 2, 4	2	$X_{14} \subset P(1.2.4.7)$
	A_1	A_1	A_2	A_2	$\frac{1}{3}$	1, 2, 3	2	$X_{12} \subset P(1.2.3.6)$
	A_1	A_1	A_1	A_4	$\frac{3}{10}$	1, 2, 4	$2+\frac{2}{5}$	$X_{12} \subset P(1.2.4.5)$
	A_1	A_1	A_1	A_5	$\frac{1}{3}$	1, 2, 4	$2+\frac{2}{3}$	
	A_1	A_1	A_1	A_6	$\frac{5}{14}$	1, 2, 4	$2+\frac{6}{7}$	
	A_1	A_1	A_1	A_7	$\frac{3}{8}$	1, 2, 4	3	
	A_1	A_1	A_2	A_3	$\frac{5}{12}$	1, 2, 3	$2+\frac{1}{2}$	$X_{10} \subset P(1.2.3.4)$
	A_1	A_1	A_2	A_4	$\frac{7}{15}$	1, 2, 3	$2+\frac{4}{5}$	
	A_1	A_1	A_2	A_5	$\frac{1}{2}$	1, 2, 3	3	
	A_1	A_1	A_3	A_3	$\frac{1}{2}$	1, 2, 3	3	
	A_1	A_2	A_2	A_2	$\frac{1}{2}$	1, 2, 3	3	$X_9 \subset P(1.2.3.3)$

i_α	2	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_1	A_1	$\frac{1}{5}$	$1,2,5$	2	$X_{16} \subset P(1.2.5.8)$
	A_4	A_1	A_2	$\frac{11}{30}$	$1,2,3$	$2+\frac{1}{5}$	$X_{11} \subset P(1.2.3.5)$
	A_4	A_1	A_3	$\frac{9}{20}$	$1,2,3$	$2+\frac{7}{10}$	
	A_4	A_1	A_4	$\frac{1}{2}$	$1,2,3$	3	
	A_6	A_1	A_1	$\frac{3}{7}$	$1,2,3$	$2+\frac{4}{7}$	

i_α	3	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_1	$\frac{3}{14}$	$1,2,5$	$2+\frac{1}{7}$	$X_{15} \subset P(1.2.5.7)$
	A_6	A_2	$\frac{8}{21}$	$1,2,3$	$2+\frac{2}{7}$	
	A_6	A_3	$\frac{13}{28}$	$1,2,3$	$2+\frac{11}{14}$	
	A_7	A_1	$\frac{3}{8}$	$1,2,3$	$2+\frac{1}{4}$	

i_α	2	2	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_4	$\frac{2}{5}$	$1,2,3$	$2+\frac{2}{5}$	

i_α	4	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_8	$\frac{2}{9}$	$1,2,5$	$2+\frac{2}{9}$	

$b_1 = 1, b_2 \geq 3$.

i_α	1	1	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	$\frac{1}{2}$	$1,2,2$	2	$X_{10} \subset P(1.2.2.5)$
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	$\frac{2}{3}$	$1,2,2$	$2+\frac{2}{3}$	$X_8 \subset P(1.2.2.3)$
	A_1	A_1	A_1	A_1	A_3	$\frac{3}{4}$	$1,2,2$	3	

i_α	3	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_6	A_1	A_1	$\frac{5}{7}$	$1,2,2$	$2+\frac{6}{7}$	

i_α	4	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_8	A_1	$\frac{13}{18}$	$1,2,2$	$2+\frac{8}{9}$	

i_α	2	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_4	A_1	A_1	A_1	$\frac{7}{10}$	$1,2,2$	$2+\frac{4}{5}$	

i_α	5	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_{10}	$\frac{8}{11}$	$1,2,2$	$2+\frac{10}{11}$	

The case of $b_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^0(E, O_E(D)) = 2$.

i_α	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_1	A_1	1	$1,1,2$	2	$X_8 \subset P(1,1,2,4)$
	A_1	A_2	$\frac{7}{6}$	$1,1,2$	$2+\frac{1}{3}$	$X_7 \subset P(1,1,2,3)$
	A_1	A_3	$\frac{5}{4}$	$1,1,2$	$2+\frac{1}{2}$	
	A_1	A_4	$\frac{13}{10}$	$1,1,2$	$2+\frac{3}{5}$	
	A_1	A_5	$\frac{8}{6}$	$1,1,2$	$2+\frac{2}{3}$	
	A_1	A_6	$\frac{19}{14}$	$1,1,2$	$2+\frac{5}{7}$	
	A_1	A_7	$\frac{11}{8}$	$1,1,2$	$2+\frac{3}{4}$	
	A_1	A_8	$\frac{25}{18}$	$1,1,2$	$2+\frac{7}{9}$	
	A_1	A_9	$\frac{7}{5}$	$1,1,2$	$2+\frac{4}{5}$	
	A_1	A_{10}	$\frac{31}{22}$	$1,1,2$	$2+\frac{9}{11}$	
	A_1	A_{11}	$\frac{17}{12}$	$1,1,2$	$2+\frac{5}{6}$	
	A_1	A_{12}	$\frac{37}{26}$	$1,1,2$	$2+\frac{11}{13}$	
	A_1	A_{13}	$\frac{10}{7}$	$1,1,2$	$2+\frac{6}{7}$	
	A_1	A_{14}	$\frac{43}{30}$	$1,1,2$	$2+\frac{13}{15}$	
	A_1	A_{15}	$\frac{23}{16}$	$1,1,2$	$2+\frac{7}{8}$	
	A_1	A_{16}	$\frac{49}{34}$	$1,1,2$	$2+\frac{15}{17}$	
	A_1	A_{17}	$\frac{13}{9}$	$1,1,2$	$2+\frac{8}{9}$	
	A_1	A_{18}	$\frac{55}{36}$	$1,1,2$	$2+\frac{17}{19}$	
	A_2	A_2	$\frac{4}{3}$	$1,1,2$	$2+\frac{2}{3}$	
	A_2	A_3	$\frac{17}{12}$	$1,1,2$	$2+\frac{5}{6}$	
	A_2	A_4	$\frac{22}{15}$	$1,1,2$	$2+\frac{14}{15}$	
	A_2	A_5	$\frac{9}{6}$	$1,1,2$	3	
	A_3	A_3	$\frac{3}{2}$	$1,1,2$	3	

i_α	1	1	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_1	A_1	A_1	$\frac{3}{2}$	$1,1,2$	3	$X_6 \subset P(1,1,2,2)$

i_α	1	D^2	q_1,q_2,q_3	$q_1{\cdot}q_2{\cdot}q_3D^2$	Example
	A_1	$\frac{1}{2}$	$1,1,4$	2	$X_{12} \subset P(1,1,4,6)$
	A_2	$\frac{2}{3}$	$1,1,3$	2	$X_{10} \subset P(1,1,3,5)$
	A_3	$\frac{3}{4}$	$1,1,3$	$2+\frac{1}{4}$	$X_9 \subset P(1,1,3,4)$
	A_4	$\frac{4}{5}$	$1,1,3$	$2+\frac{2}{5}$	
	A_5	$\frac{5}{6}$	$1,1,3$	$2+\frac{1}{2}$	
	A_6	$\frac{6}{7}$	$1,1,3$	$2+\frac{4}{7}$	
	A_7	$\frac{7}{8}$	$1,1,3$	$2+\frac{5}{8}$	
	A_8	$\frac{8}{9}$	$1,1,3$	$2+\frac{6}{9}$	
	A_9	$\frac{9}{10}$	$1,1,3$	$2+\frac{7}{10}$	
	A_{10}	$\frac{10}{11}$	$1,1,3$	$2+\frac{8}{11}$	
	A_{11}	$\frac{11}{12}$	$1,1,3$	$2+\frac{9}{12}$	
	A_{12}	$\frac{12}{13}$	$1,1,3$	$2+\frac{10}{13}$	
	A_{13}	$\frac{13}{14}$	$1,1,3$	$2+\frac{11}{14}$	
	A_{14}	$\frac{14}{15}$	$1,1,3$	$2+\frac{12}{15}$	
	A_{15}	$\frac{15}{16}$	$1,1,3$	$2+\frac{13}{16}$	
	A_{16}	$\frac{16}{17}$	$1,1,3$	$2+\frac{14}{17}$	
	A_{17}	$\frac{17}{18}$	$1,1,3$	$2+\frac{15}{18}$	
	A_{18}	$\frac{18}{19}$	$1,1,3$	$2+\frac{16}{19}$	
	A_{19}	$\frac{19}{20}$	$1,1,3$	$2+\frac{17}{20}$	

The case of $b_1 = \dim_{\mathbb{C}} H^0(E, O_E(D)) = 3$.

i_α	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	$2+\frac{1}{2}$	1,1,1	$2+\frac{1}{2}$	$X_5 \subset P(1,1,1,2)$
	A_2	$2+\frac{2}{3}$	1,1,1	$2+\frac{2}{3}$	
	A_3	$2+\frac{3}{4}$	1,1,1	$2+\frac{3}{4}$	
	A_4	$2+\frac{4}{5}$	1,1,1	$2+\frac{4}{5}$	
	A_5	$2+\frac{5}{6}$	1,1,1	$2+\frac{5}{6}$	
	A_6	$2+\frac{6}{7}$	1,1,1	$2+\frac{6}{7}$	
	A_7	$2+\frac{7}{8}$	1,1,1	$2+\frac{7}{8}$	
	A_8	$2+\frac{8}{9}$	1,1,1	$2+\frac{8}{9}$	
	A_9	$2+\frac{9}{10}$	1,1,1	$2+\frac{9}{10}$	
	A_{10}	$2+\frac{10}{11}$	1,1,1	$2+\frac{10}{11}$	
	A_{11}	$2+\frac{11}{12}$	1,1,1	$2+\frac{11}{12}$	
	A_{12}	$2+\frac{12}{13}$	1,1,1	$2+\frac{12}{13}$	
	A_{13}	$2+\frac{13}{14}$	1,1,1	$2+\frac{13}{14}$	
	A_{14}	$2+\frac{14}{15}$	1,1,1	$2+\frac{14}{15}$	
	A_{15}	$2+\frac{15}{16}$	1,1,1	$2+\frac{15}{16}$	
	A_{16}	$2+\frac{16}{17}$	1,1,1	$2+\frac{16}{17}$	
	A_{17}	$2+\frac{17}{18}$	1,1,1	$2+\frac{17}{18}$	
	A_{18}	$2+\frac{18}{19}$	1,1,1	$2+\frac{18}{19}$	
	A_{19}	$2+\frac{19}{20}$	1,1,1	$2+\frac{19}{20}$	

i_α	1	1	D^2	q_1, q_2, q_3	$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 D^2$	Example
	A_1	A_1	3	1,1,1	3	

これら加えて，$D^2=2$ かつ，E が非特異 K3 曲面の場合が，$P(1,1,1,3) \supseteq X_6$ となり，ここに含まれる。

問題： あまりに，何も手がかりがないところで，まずなにに手をつけるかであるが，

(1). $e(m,A)=2$ をみたす simple K3 singularity の canonical model にあらわれる，(E,D) については，$q_1 q_2 q_3 D^2 = 2$ 及び，(0.6)で述べた形の重みつきの "base pt free" が，最初の3つの元 y_1, y_2, y_3 (Theorem A の x_1, x_2, x_3 と対応する元) について成立する，上記 list で，$q_1 q_2 q_3 D^2 = 2$ を満たす list の中で，どのような条件が満たされれば，そのような (E,D) であるかと言えるか？ (E が非特異である時は，ample divisor D with $D^2=2$ かつ "base point free" になるかという問である。)

(2). $G = gr_F A = R(E, D)$ が超曲面となる時, (1.6)(2) が成立するが, 逆に, 上記の list のうち, (1.6)(2) が成立するかどうかを判定できるか?

(3) Theorem (1.3) の仮定が成立しているような (E, D) ($G = gr_F A$ が正規の場合、(E, D) の条件で与えられる。) について, 誤差項 $I(W_1, W_2, W_3, A)$ は, (E, D) のどのような data で決定されるか? Basket of singularity で計算されるか?

Acknowledgements. この仕事の大部分及び [21,22,23] は、早稲田大、筑波大で定期的に行われている特異点セミナーに参加することによって、数学的内容が鍛えられました。石井志保子氏、中山昇氏をはじめセミナーの全てのメンバーに感謝の意を表したい。このノート全体にわたって渡辺敬一先生より数え切れない貴重な助言を賜りました。 また、M.Reid 先生 , A.N.Fletcher 氏, 米村崇氏 の 多くの例及び議論は研究を行う際の evidence となりました。また 同時期に行われていた 渡辺公夫氏の Riemann-Roch を用いた仕事も参考になりました。§2 の list は、木田祐司氏の UBasic 86 を用いて算出しました。

彼らに感謝の念を捧げます。

References

1. Demazure, M.: Anneaux gradués normaux ; in Seminarire Demazure -Giraud - Teissier, 1979. Ecole Polytechnique In:Lê Dũng Tráng(ed.) Introduction a la théorie des singularités II; Méthodes algébriques et géométriques (Travaux En Cours vol.37, pp.35-68) Paris:Hermann 1988

2. Fletcher, A.R.: Plurigenera of 3-folds and weighted hypersurfaces. Thesis submitted to the University of Warwick for the degree of Ph.D. (1988).

3. Fletcher; A.R.: Working with weighted complete intersections. Preprint. M.P.I. 89-35, Max-Planck-Institut für Mathematik, pp.57 ,(1989).

4. Giraud, J.: Improvement of Grauert-Riemenschneider's Theorem for a normal surface. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **324**,13-23 (1982)

5. Herrmann, M., Ikeda, S., Orbanz, U.: Equimultiplicity and blowing-up. Springer 1988 pp 629.

6. Ishii, S.: On isolated Gorenstein singularities. Math. Ann.**270**,541-554 (1985)

7. Ishii, S.: Isolated Q-Gorenstein singularities of dimension three. In:Suwa,T., Wagreich,Ph.(eds.) Complex Analytic Singularities : Japan-US Seminar 1984 , Tsukuba Kyoto (Adv. Studies in pure Math.,vol.**8**, pp.165-198) Tokyo Amsterdam: Kinokuniya-North-Holland 1986

8. Ishii, S., Watanabe, Kimio: On simple K3-singularities. (in Japanese) Note appeared in: N. Sasakura.(ed.) The proceedings of the conference of Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ. pp.20-31 (1988).

9. Ishii, S., Watanabe, Kimio: A geometric characterization of simple K3-singularities. Preprint.

10. Kawamata, Y., Matsuda, K., Matsuki, K.: Introduction to the minimal model problem. In:Oda,T.(ed.) Algebraic Geometry, Sendai,1985 (Adv. Studies in pure Math. vol.**10**,pp.283-360) Tokyo Amsterdam: Kinokuniya-North-Holland 1987

11. Kleiman, S.: Toward a numerical theory of ampleness . Ann. of Math. Vol. **84**, pp293-344 (1966)

12. Laufer, H. B.: Tangent cones for deformations of two-dimensional quasi-homogeneous singularities. In:Randell,R.(ed.) Singularities 1986 , Iowa (Contemporary Mathematics **90**, pp.183–197) Amer. Math. Soc. 1989

13. Matsumura, H.: Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8 (1980 published in Japan, translation by M. Reid and published in 1986).

14. Mori, S.: Flip conjecture and the existence of minimal models for 3-folds. J. of

Amer. Math. Soc.**1**,117-253 (1988)

15. Ramanujam, C.P.: On a geometric interpretarion of multiplicity. Invent. Math. **22**. 63-67, (1973)
16. Rees, D.: Lectures on the asymptotic theory of ideals , London Mathematical Society Lecture Note Series **113**, Cambridge Univ. Press
17. Reid , M.: Canonical 3-folds. In:A.Beauville(ed.) Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979, Algebraic geometry. pp.273-310, Sijthhoff and Noordhoff (1980)
18. Reid, M.: Minimal models of canonical 3-folds. In:Iitaka,S.(ed.) Algebraic Varieties and Analytic Varieties (Adv. Studies in pure Math.**1**,131-180) Tokyo Amsterdam: Kinokuniya-North-Holland 1983
19. Reid, M.: Young person's guide to canonical singularities. In:Bloch,SJ.(ed.) Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Part I (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. vol. **46**, 354 - 414) Amer.Math.Soc.(1987)
20. Saito, K.: Einfach elliptische Singularitäten. Invent. Math.,**23**,289-325 (1974)
21. Tomari, M.: The canonical filtration of higher dimensional purely elliptic singularity of a special type. Invent. Math. (to appear)
22. Tomari, M.: Multiplicity of filtered rings, In:Watanabe,k.-i.(ed.) Aplications of Frobenius' map on the Commutative Ring Theory, 1989 (RIMS. Kokyu-Roku Kyoto Univ. vol.**713**,pp.164-180)
23. Tomari, M.: Multiplicity of filtered rings II,(in Japanese) In:Yoshino,Y., Yamauchi,N.(ed.) Proceedings of Commutative Ring Theory , Japan (1989) (vol.**11**, pp.59 - 70)
24. Watanabe, Kei-ichi: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J.**83**,203-211 (1981)
25. Watanabe, Kei-ichi: Rational singularities with k^*-action. In:Greco,S.,G. Valla,G (eds.) Commutative algebra ; Proc. Trento Conf. (Lecture Notes in Pure and applied Math.**84**,pp.339–351) Marcel Dekker 1983
26. Watanabe, Kimio: On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Ann.**250**, 65-94 (1980)

27. Watanabe, Kimio: On plurigenera of normal isolated singularities II. In:Suwa,T., Wagreich,Ph.(eds.) Complex Analytic Singularities : Japan-US Seminar 1984 , Tsukuba Kyoto (Adv. Studies in pure Math.8,pp.671-685) Tokyo Amsterdam: Kinokuniya-North-Holland 1986

28. Watanabe, Kimio: Distribution formula for terminal singularities on the minimal resolution of a quasi-homogeneous simple K3 singularity. Preprint.

29. Yonemura, T.: On hypersurface simple K3-singularities. Tohoku Math. J. **42**, 351-380 (1990)